КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 12065 УДК 37.036.5:514

Горев П. М., Сорокина А. В. Признаки равенства треугольников как задача открытого типа при изучении геометрии в основной школе // Концепт: научно-методический электронный журнал. – 2012. – № 6 (июнь). – ART 12065. – 0,4 п. л. – URL: http://www.covenok.ru/koncept/2012/12065.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-46214. – ISSN 2304-120X.

Горев Павел Михайлович,
кандидат педагогических наук, доцент кафедры математического анализа и методики обучения математике ФГБОУ ВПО «Вятский государственный гуманитарный университет», г. Киров
pavel-gorev@mail.ru

Сорокина Анастасия Владимировна,
студентка V курса факультета информатики, математики и физики ФГБОУ ВПО «Вятский государственный гуманитарный университет», г. Киров
vesnasky@mail.ru

Признаки равенства треугольников как задача открытого типа при изучении геометрии в основной школе

Аннотация. *В статье описывается возможность построения системы геометрических задач (а именно признаков равенства треугольников) на основе рассмотрения учебной задачи открытого типа, подводящей к творческому осмысленному восприятию материала и способствующей развитию критического мышления учащихся.*
Ключевые слова: *обучение геометрии, задачи открытого типа, проблемное обучение, развивающее обучение, развитие критического мышления.*

Развитие личности с высоким уровнем интеллекта, мощным творческим потенциалом, способной раскрыть их в своей профессиональной деятельности – одна из наиболее важных и приоритетных задач обновляющейся школы. Математическое образование в силу специфичности своего предмета в значительной степени позволяет формировать интеллект учащихся и имеет широкий, но недостаточно большой потенциал для развития их творческих способностей [1, 2].

Одним из направлений в решении проблемы развития научного творчества школьников при обучении математике может стать включение в изучаемый материал задач открытого типа как эффективного средства развития креативности учащихся основной и средней школы [3–5]. Такие задачи не регламентируют четких условия, рассуждений и выводов: предложенное решение либо применимо к условию и приводит к требуемому результату, либо нет. Задачи открытого типа чаще всего встречаются в практической деятельности, поэтому школьный курс математики должен целенаправленно способствовать формированию у учеников умения их решать [6].

Именно поэтому особое значение приобретает исследовательская работа по выявлению возможностей использования таких задач в процессе изучения школьного курса математики, а также созданию систем таких задач и методики работы с ними в соответствии с действующим обновленным федеральным стандартом математического образования школьников.

Приведем пример открытой задачи математической направленности.

Задача 1. Как убедиться, что два предлагаемых куска ткани одинаковы?

Конечно, на практике такая задача, скорее всего, будет решена простым наложением одного куска на другой, что, в общем-то, естественно как с позиций геометрии, так и с позиций практики, но не несет должного образовательного эффекта.

Поэтому формулировка такой открытой задачи требует внесения изменений, что сузит степени открытости, но повысит ее образовательную составляющую [7].

Задача 2. Как убедится, что две фигуры, не доступные для практических действий с ними (вырезание, накладывание и т. п.), равны?

Горев П. М., Сорокина А. В. Признаки равенства треугольников как задача открытого типа при изучении геометрии в основной школе // Концепт: научно-методический электронный журнал. – 2012. – № 6 (июнь). – ART 12065. – 0,4 п. л. – URL: http://www.covenok.ru/koncept/2012/12065.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-46214. – ISSN 2304-120X.

Задача, оставаясь открытой, теперь уже требует применения геометрических соображений практического (измерение длин отрезков и величин углов, сопоставление и т. п.) или теоретического (доказательство) характера. Сузим требования задачи до простейших геометрических фигур – треугольников.

Задача 3. Как убедится, не прибегая к практическим действиям, что два треугольника равны?

Эта задача открытого типа уже может быть включена в процесс изучения темы «Признаки равенства треугольников» в 7 классе основной школы и, после соответствующей переформулировки, следующей далее, может использоваться при изучении трех наиболее известных (основных) признаков равенства треугольников [8].

Задача 4. Укажите и докажите возможные признаки равенства треугольников.

Это учебная задача, носящая признаки открытости. Так, отрытым является условие задачи – неясно, какие элементы можно использовать; ее решение тоже может быть осуществлено разными способами; да и выводы могут быть разнообразны.

Обсудим более подробно открытость условия задачи.

Условимся для начала называть элементами треугольника его стороны и углы. Каждый из трех основных признаков равенства треугольников позволяет сделать вывод о равенстве двух треугольников, если установлено, что три элемента одного треугольника (хотя бы один из которых – линейный) соответственно равны трем элементам другого треугольника. В первом признаке такими элементами являются две стороны и угол между ними, во втором – сторона и два прилежащих к ней угла, в третьем – три стороны. Возникает естественный вопрос: а будут ли равны два треугольника, если какие-то иные три элемента одного из них равны соответствующим элементам другого? Иначе говоря, есть ли другие признаки равенства двух треугольников по трем элементам?

Сначала перечислим, какие еще есть возможности. Если взять в качестве исследуемых элементов одну сторону и два угла, то они оба могут быть прилежащими к этой стороне (такой случай рассматривается во втором признаке равенства треугольников), а может быть и другой вариант: один из углов является прилежащим, а другой – противолежащим. Таким образом, возможен признак равенства треугольников по стороне и двум углам, один из которых является прилежащим, а другой – противолежащим для этой стороны. Далее, если рассматривать две стороны и угол, то он может быть заключен между этими сторонами (такой случай рассматривается в первом признаке равенства треугольников), а может быть противолежащим одной из сторон. Тем самым, возникает вопрос о признаке равенства треугольников по двум сторонам и углу, противолежащему одной из них. И, наконец, в качестве трех элементов треугольника можно взять три угла и рассмотреть вопрос о признаке равенства треугольников по трем углам. Напомним, что рассмотрение в качестве элементов трех сторон составляют третий из основных признаков равенства треугольников.

Итак, есть три возможности. Осталось выяснить какие из них, являясь верными фактами, дают «новые» признаки равенства треугольников.

Гипотеза 1. Если сторона и два угла (прилежащий и противолежащий для этой стороны) одного треугольника соответственно равны стороне и двум углам (прилежащему и противолежащему для этой стороны) другого треугольника, то такие треугольники равны.

Попробуем доказать, что эта гипотеза верна, попутно показав два из многих возможных вариантов доказательства, что дает представление об открытости процесса решения задачи.

Доказательство 1. Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$. Мы хотим доказать, что эти треугольники равны. Мысленно наложим треугольник ABC на треугольник $A_1B_1C_1$ так, чтобы вершина A совместилась с вершиной A_1, а стороны AB и AC наложились на лучи A_1B_1 и A_1C_1. Это можно сделать, т. к. $\angle A = \angle A_1$. Поскольку $AB = A_1B_1$, то сторона AB совместится со стороной A_1B_1, в частности, совместятся вершины B и B_1. Остается доказать, что вершины C и C_1 так же совместятся. Если предположить, что вершина C совместится не с точкой C_1, а с какой-то другой точкой C_2 на луче A_1C_1, то получится треугольник $B_1C_1C_2$, у которого внешний угол при равен углу треугольника, не смежному с этим внешним углом. Но этого не может быть (точнее может быть лишь в случае, если угол B_1 этого треугольника нулевой), поэтому вершина C совместится с вершиной C_1. Следовательно, совместятся и стороны BC и B_1C_1. Итак, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ полностью совместятся, а значит, они равны.

Доказательство 2 будем основывать на уже известном втором признаке равенства треугольников. Пусть вновь даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$. В силу того, что сумма углов треугольника неизменна и равна 180° и у треугольников есть две пары равных углов, то и третья пара составит равные углы ($\angle B = \angle B_1$). Следовательно, в каждом треугольнике есть по стороне и паре прилежащих к ней углов находящихся в соответственном равенстве ($AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$), что доказывает равенство самих треугольников.

Таким образом, наша гипотеза оказалась верной и имеет место еще один признак равенства треугольников.

Четвертый[1] признак равенства треугольников. Если сторона и два угла (прилежащий и противолежащий для этой стороны) одного треугольника соответственно равны стороне и двум углам (прилежащему и противолежащему для этой стороны) другого треугольника, то такие треугольники равны.

Заметим, что признаки треугольников, обозначенные у нас под номерами два и четыре можно объединить и рассматривать обобщенный признак.

Теорема (признак равенства треугольников). Если сторона и два угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Однако вернемся к рассмотрению заявленных возможностей равенства элементов двух треугольников.

Гипотеза 2. Если две стороны и угол, противолежащий одной из этих сторон, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство. Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle C = \angle C_1$. Мысленно наложим треугольник ABC на треугольник $A_1B_1C_1$ так, чтобы вершина C совместилась с вершиной C_1, а стороны BC и AC наложились на лучи B_1C_1 и A_1C_1 соответственно. Это можно сделать, т. к. $\angle C = \angle C_1$. Поскольку $AC = A_1C_1$, то сторона AC совместится со стороной A_1C_1, в частности, совместятся вершины A и A_1. Остается доказать, что вершины B и B_1 также совместятся. Но так ли это? Допустим, что точка B совместилась не с точкой B_1, а с какой-то другой точкой B_2 на луче C_1B_1. Тогда треугольник $A_1B_1B_2$ – равнобедренный ($A_1B_1 = A_1B_2$).

Поскольку углы при основании равнобедренного треугольника – острые, то смежные с ними углы – тупые. Поэтому либо угол B_1 треугольника $A_1B_1C_1$ тупой (если

[1] Нумерация признаков здесь и далее – условная.

B_1 лежит между C_1 и B_2), либо угол B_2 треугольника $A_1B_2C_1$ тупой (если B_2 лежит между C_1 и B_1). Принимая во внимание соотношение между сторонами и углами треугольника, и в том, и в другом случае получаем: $A_1B_1 = A_1B_2 < A_1C_1$. Следовательно, если $A_1B_1 \geq A_1C_1$, то точки B и B_1 должны совместиться. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ полностью совместятся, а значит, они равны.

Если же $A_1B_1 < A_1C_1$ (и, следовательно, $AB < AC$), то никакого противоречия нет. И в этом случае наша гипотеза не верна.

Таким образом, гипотеза в том виде, в котором мы ее сформулировали, не верна. Однако признак равенства треугольников по двум сторонам и углу, противолежащему одной из них, имеет место в том случае, когда сторона, противолежащая этому углу, не меньше второй из данных сторон.

Здесь нужно остановиться и заметить, что многовариантность возможных ответов задачи в зависимости от условий, дает повод говорить об определенной доле открытости результатов решения задачи 4.

Итак, нами сформулирован еще один признак равенства треугольников.

Пятый признак равенства треугольников. Если две стороны и угол, противолежащий одной из этих сторон, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу другого треугольника, при этом сторона, противолежащая углу, не меньше второй из данных сторон, то такие треугольники равны.

Возвращаясь к рассмотрению заявленных выше случаем, замечаем, что осталось выяснить, имеет ли место признак равенства треугольников по трем углам.

Гипотеза 3. Если три угла одного треугольника соответственно равны трем углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство. Уже на первый взгляд гипотеза кажется неверной. На самом деле, рассмотрим два неравных квадрата $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Проведем диагонали AC и A_1C_1 и рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$. Углы этих треугольников соответственно равны: в каждом треугольнике один угол прямой, а два другие по 45°. Но сами треугольники, очевидно, не равны.

Количество признаков равенства треугольников возрастает, если наряду с элементами треугольника рассматривать медианы, биссектрисы и высоты.

Разберем некоторые из них.

Гипотеза 4. Если две стороны и медиана, проведенная из общей вершины этих сторон, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и медиане, проведенной из общей вершины этих сторон, другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство. Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $AM = A_1M_1$. Где AM и A_1M_1 – медианы треугольников. Докажем, что эти треугольники равны.

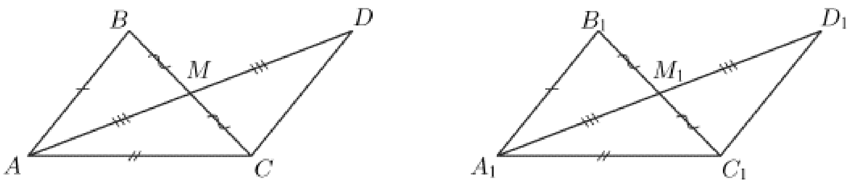

Рис. 1

На продолжениях медиан AM и A_1M_1 отметим точки D и D_1 так, что $DM = AM = A_1M_1 = D_1M_1$ (рис. 1). Треугольники ABM и CDM равны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому $AB = CD$. Аналогично, из равенства треугольников $A_1B_1M_1$ и $C_1D_1M_1$ следует, что $A_1B_1 = C_1D_1$, а т. к. $AB = A_1B_1$, то $CD = C_1D_1$.

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 12065 УДК 37.036.5:514
Горев П. М., Сорокина А. В. Признаки равенства треугольников как задача открытого типа при изучении геометрии в основной школе // Концепт: научно-методический электронный журнал. – 2012. – № 6 (июнь). – ART 12065. – 0,4 п. л. – URL: http://www.covenok.ru/koncept/2012/12065.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-46214. – ISSN 2304-120X.

Треугольники ACD и $A_1C_1D_1$ равны по трем сторонам. Поэтому $\angle CAD = \angle C_1A_1D_1$. Следовательно, треугольники CAM и $C_1A_1M_1$ равны по двум сторонам и углу между ними, а значит, $CM = C_1M_1$. Из этого следует, что $BC = 2CM = 2C_1M_1 = B_1C_1$.

Итак, в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ имеем $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$. Следовательно, треугольники равны по трем сторонам.

Мы установили, что имеет место еще один признак равенства треугольников.

Шестой признак равенства треугольников. Если две стороны и медиана, проведенная из общей вершины этих сторон, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и медиане, проведенной из общей вершины этих сторон, другого треугольника, то такие треугольники равны.

Возникает вопрос: а что, если медиану заменить на биссектрису или высоту? Сохранится ли признак равенства треугольников?

Гипотеза 5. Если две стороны и биссектриса, проведенная из общей вершины этих сторон, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и биссектрисе, проведенной из общей вершины этих сторон, другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство. Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $AM = A_1M_1$. Где AM и A_1M_1 – биссектрисы треугольников. Докажем, что эти треугольники равны. Докажем, что если $\angle A = \angle A_1$, то треугольники будут равны по первому признаку равенства треугольников. Допустим, что это не так. Пусть для определенности $\angle A < \angle A_1$. Мысленно наложим треугольник ABC на треугольник $A_1B_1C_1$ так, чтобы луч AM наложился на луч A_1M_1, а вершина B и B_1 оказались по одну сторону от AM. Обозначим буквами P и Q точки пересечения отрезка B_1C_1 с лучами AB и AC. В треугольнике APQ хотя бы один из углов P, Q – острый. Если угол P – острый, то смежный с ним угол APB_1 – тупой. Поэтому сторона AB_1 треугольника APB_1 больше, чем AP. Но $AB_1 = AB$. Следовательно, $AB > AP$, а значит точка P лежит на отрезке AB. Если угол Q треугольника APQ – острый, то точка Q лежит на отрезке AC (аналогично предыдущему рассуждению). В этом случае, точки P и Q лежат по одну сторону от прямой BC. Поэтому точка M_1 пересечения отрезка B_1C_1 с лучом AM является внутренней точкой отрезка AM, т. е. $AM \neq AM_1$. Что и требовалось доказать, значит, наша гипотеза верна.

Седьмой признак равенства треугольников. Если две стороны и биссектриса, проведенная из общей вершины этих сторон, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и биссектрисе, проведенной из общей вершины этих сторон, другого треугольника, то такие треугольники равны.

Гипотеза 6. Если две стороны и высота, проведенная из общей вершины этих сторон, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и высоте, проведенной из общей вершины этих сторон, другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство. Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $AH = A_1H_1$. Где AH и A_1H_1 – высоты треугольников. Докажем, что если $\angle A = \angle A_1$, то треугольники будут равны по первому признаку.

Прямоугольные треугольники ABH и $A_1B_1H_1$ равны по доказанному нами ранее признаку по двум сторонам и углу, противолежащему одной из них. Следовательно, $\angle BAH = \angle B_1A_1H_1$. Аналогично $\angle CAH = \angle C_1A_1H_1$. Тогда, $\angle A = \angle BAH + \angle CAH = \angle B_1A_1H_1 + \angle C_1A_1H_1 = \angle A_1$. А если $\angle A = \angle BAH + \angle CAH$, а $\angle A_1 = \angle B_1A_1H_1 - \angle C_1A_1H_1$, тогда треугольники не будут равны. Контрпримером может служить равнобедренный треугольник ABC, где $AB = AC$, AH – высота. Если на продолжении стороны

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 12065 УДК 37.036.5:514
Горев П. М., Сорокина А. В. Признаки равенства треугольников как задача открытого типа при изучении геометрии в основной школе // Концепт: научно-методический электронный журнал. – 2012. – № 6 (июнь). – ART 12065. – 0,4 п. л. – URL: http://www.covenok.ru/koncept/2012/12065.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-46214. – ISSN 2304-120X.

BC отметить точку *D*, то треугольники *ABD* и *ACD* будут удовлетворять условиям гипотезы. Таким образом, наша гипотеза не верна.

Гипотеза 7. Если сторона, прилежащий к ней угол и высота, проведенная к этой стороне, одного треугольника соответственно равны стороне, прилежащему к ней углу и высоте, проведенной к этой стороне, другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство. Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $BH = B_1H_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$. Где BH и B_1H_1 – высоты треугольников. Докажем, что эти треугольники равны. Рассмотрим три случая. Первый случай: углы $\angle A$ и $\angle A_1$ – острые. В этом случае треугольники ABH и $A_1B_1H_1$ равны по доказанному нами признаку равенства треугольников по стороне и двум углам, один из которых противолежащий, другой прилежащий к этой стороне. Тогда $AB = A_1B_1$. Т. к. $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $AB = A_1B_1$, то треугольники равны по двум сторонам и углу между ними. Второй случай: углы $\angle A$ и $\angle A_1$ – тупые, доказывается аналогично предыдущему. Если же $\angle A$ и $\angle A_1$ – прямые, то высота BH совпадет со стороной AB треугольника ABC, т. е. совпадают точки A и H, высота B_1H_1 совпадет со стороной A_1B_1 треугольника $A_1B_1H_1$. Тогда треугольники равны по двум сторонам и углу между ними.

Восьмой признак равенства треугольников. Если сторона, прилежащий к ней угол и высота, проведенная к этой стороне, одного треугольника соответственно равны стороне, прилежащему к ней углу и высоте, проведенной к этой стороне, другого треугольника, то такие треугольники равны.

Очевидно, список признаков можно продолжать и далее, включая в рассмотрение другие элементы треугольника: радиусы вписанной, описанной, вневписанных окружностей, внешние углы, проекции двух сторон на третью, отрезки, на которые разбивает сторону биссектриса и т. д.

Таким образом, учебная открытая задача позволила перейти к творческому осмыслению материала, связанного с признаками равенства треугольников и пополнить как фактологическую, так и доказательную базу семиклассников.

Ссылки на источники

1. Горев П. М. Формирование творческой деятельности школьников в дополнительном математическом образовании: дисс. … канд. пед. наук. – Киров: ВятГГУ, 2006. – 158 с.
2. Горев П. М. Приобщение к математическому творчеству: Дополнительное математическое образование: монография. – Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG (Germany), 2012. – 156 с.
3. Утёмов В. В. Задачи открытого типа как средство развития креативности учащихся средней школы // Концепт: научно-методический электронный журнал официального сайта эвристических олимпиад «Совёнок» и «Прорыв». – Декабрь 2011, ART 1102. – Киров, 2011 г. – URL: http://www.covenok.ru/koncept/2011/1102.htm.
4. Утёмов В. В. Развитие креативности учащихся основной школы: Решая задачи открытого типа: монография. – Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG (Germany), 2012. – 186 с.
5. Горев П. М., Утёмов В. В. Формула творчества: Решаем открытые задачи. Материалы эвристической олимпиады «Совёнок»: учебно-методическое пособие. – Киров: Изд-во ВятГГУ, 2011. – 288 с.
6. Горев П. М., Утёмов В. В. Развитие креативности через использование ситуаций в обучении математике // Лаборатория образовательных технологий «Образование для Новой Эры», 2011. – URL: http://www.trizway.com/art/secondary/305.html.
7. Утёмов В. В. Учебные задачи открытого типа // Концепт: научно-методический электронный журнал официального сайта эвристических олимпиад «Совенок» и «Прорыв». – Май 2012, ART 1257. – Киров, 2012 г. – URL: http://www.covenok.ru/koncept/2012/1257.htm.
8. Геометрия 7–9: учеб. для общеобразоват. учреждений / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др. – М.: Просвещение, 2008. – 384 с.

КОНЦЕПТ
научно-методический электронный журнал
ART 12065 УДК 37.036.5:514
Горев П. М., Сорокина А. В. Признаки равенства треугольников как задача открытого типа при изучении геометрии в основной школе // Концепт: научно-методический электронный журнал. – 2012. – № 6 (июнь). – ART 12065. – 0,4 п. л. – URL: http://www.covenok.ru/koncept/2012/12065.htm. – Гос. рег. Эл № ФС 77-46214. – ISSN 2304-120X.

Gorev Pavel,
Candidate of Pedagogical Sciences, associate professor at the chair of mathematical analysis and methods of teaching mathematics Vyatka State Humanities University, Kirov
pavel-gorev@mail.ru
Sorokina Anastasia,
student of faculty of computer science, mathematics and physics Vyatka State Humanities University, Kirov
vesnasky@mail.ru

Signs of the equality of triangles as the problem of open the study of geometry in primary school

Summary. This paper describes the possibility of constructing a system of geometric problems (namely, the equality signs triangles) based on the consideration of educational problems of open type, the supply of creative and meaningful perception of the material to promote the development of critical thinking of students.

Keywords: teaching of geometry, the problem open, problem training, developing training, the development of critical thinking.

ISSN 2304-120X
9 772304 120128 06